Université Paul Sabatier de Toulouse, année universitaire 2005-2006

CIMP, PHYSIQUE

ÉPREUVE 3 de Contrôle continu, Jeudi 5 janvier 2006, durée : 1 h

Corrigé sommaire

A. Questions de cours (5 points)

Onde plane monochromatique et onde sphérique monochromatique

i) Onde plane monochromatique = onde telle que l'ensemble des points d'égale perturbation appartiennent à un plan et telle que la dépendance temporelle soit sinusoïdale :

$$\Psi(t, \mathbf{r}) = A \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$$

ii) Onde sphérique monochromatique = onde telle que l'ensemble des points d'égale perturbation appartiennent à une sphère et telle que la dépendance temporelle soit sinusoïdale :

$$\Psi(t, \mathbf{r}) = A \cos(\omega t - kr)$$

iii) En optique, les lentilles de verre sont les instruments capables de transformer une onde plane en une onde sphérique et vice-versa. Les rayons issus du foyer objet d'une lentille mince convergente émergent parallèlement à l'axe optique. De façon analogue les rayons incidents parallèles à l'axe optique émergent en passant par le foyer image de la lentille.

B. Problème (15 points)

Station spatiale internationale en orbite autour de la Terre

1) a) La deuxième loi de Newton, appliquée à S, par rapport à $\mathcal{R}_g$ galiléen, donne :

$$m\mathbf{a} = -\frac{GM_T m}{r_0^2}\,\mathbf{e}_r$$

b) En projection dans la base de Frenet $\mathbf{e}_t$, $\mathbf{e}_n$, $\mathbf{e}_b$, on obtient :

$$m(a_t\,\mathbf{e}_t + a_n\,\mathbf{e}_n) = \frac{GM_T m}{r_0^2}\,\mathbf{e}_n \quad \text{car} \quad \mathbf{e}_r = -\mathbf{e}_n$$

Il en résulte :

$$a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{v^2}{r_0} = \frac{GM_T}{r_0^2}$$

On en déduit la vitesse de satellisation :

$$v_s = \left(\frac{GM_T}{r_0}\right)^{1/2} = \left(\frac{6,67 \times 10^{-11} \times 6 \times 10^{24}}{(6,4 + 0,4) \times 10^6}\right)^{1/2} = 7,672\,\mathrm{km.s}^{-1}$$

c) On en déduit aisément l'énergie cinétique $\mathcal{E}_k$ de S dans $\mathcal{R}_g$, en fonction de M_T, m et r_0 :

$$\mathcal{E}_k = \frac{1}{2}mv_s^2 = \frac{GM_T m}{2r_0} = \frac{6,67 \times 10^{-11} \times 6 \times 10^{24} \times 95 \times 10^3}{2 \times (6,4 + 0,4) \times 10^6} = 2,795\,\mathrm{TJ}$$

2. a) L'expression du travail élémentaire de la force de gravitation qui s'exerce sur l'ISS, lorsqu'on déplace son point d'application S d'un vecteur élémentaire d$\mathbf{r}$ est la suivante :

$$\delta W = \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = -\frac{GM_T m}{r^2}\mathbf{e}_r \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = -\frac{GM_T m}{r^2}\,\mathrm{d}r = -GM_T m\,\frac{\mathrm{d}r}{r^2}$$

Le travail δW peut se mettre sous la forme d'une différentielle :

$$\delta W = -GM_T m\frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \mathrm{d}\left(\frac{GM_T m}{r}\right)$$

ce qui peut s'écrire :

$$\delta W = -\mathrm{d}\mathcal{E}_p \quad \text{avec} \quad \mathcal{E}_p = \frac{-GM_T m}{r} + \text{Cte}$$

En choisissant $\mathcal{E}_p = 0$ pour r infini, on trouve :

$$\mathcal{E}_p = -\frac{GM_T m}{r_0} = -\frac{6,67\times 10^{-11}\times 6\times 10^{24}\times 95\times 10^3}{(6,4+0,4)\times 10^6} = -5,590\,\mathrm{TJ}$$

b) Appliquons le théorème de l'énergie cinétique à S soumis à la force de gravitation, à la force exercée par l'opérateur et à une force de frottement :

$$\Delta\mathcal{E}_k = W_{grav} + W_{op} + W_f \quad \text{d'où} \quad W_{op,\infty\to r_0} = -W_{grav,\infty\to r_0} - W_{f,\infty\to r_0} + \left\{\Delta\mathcal{E}_k\right\}_{\infty}^{r_0}$$

On en déduit :

$$W_{op,\infty\to r_0} = \left\{\Delta\mathcal{E}_p\right\}_{\infty}^{r_0} - W_{f,\infty\to r_0} + \left\{\Delta\mathcal{E}_k\right\}_{\infty}^{r_0}$$

En l'absence de frottement et d'énergie cinétique, il vient :

$$W_{op,\infty\to r_0} = \left\{\Delta\mathcal{E}_p\right\}_{\infty}^{r_0} = \mathcal{E}_p(r_0) - \mathcal{E}_p(\infty) = \mathcal{E}_p(r_0)$$

d'où la définition donnée.

c) L'énergie mécanique de l'ISS est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle :

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_k + \mathcal{E}_p = \frac{GM_T m}{2r_0} - \frac{GM_T m}{r_0} = -\frac{GM_T m}{2r_0} = -2,795\,\mathrm{TJ}$$

d) Sous l'action des forces de frottement de puissance négative, l'énergie mécanique diminue :

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_m}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}_f < 0 \quad \text{d'où} \quad \mathrm{d}\mathcal{E}_m < 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{d}\mathcal{E}_k = -\mathrm{d}E_m > 0$$

Lorsque l'énergie mécanique diminue de *varepsilon*, l'énergie potentielle augmente de 2ε, puisque $\mathcal{E}_p = 2\mathcal{E}_m$. Il en résulte que l'énergie cinétique augmente de ε.

3. a) Par définition, la vitesse de libération est telle que l'énergie totale nulle :

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_k + \mathcal{E}_p = \frac{1}{2}mv_l^2 - \frac{GM_T m}{r_0} = 0$$

d'où :

$$v_l = \left(\frac{2GM_T}{r_0}\right)^{1/2} = v_s\sqrt{2} = 7,672\times 1,414 = 10,848\,\mathrm{km.s^{-1}}$$

b) Pour que la vitesse de libération atteigne la valeur de la constante d'Einstein, il faudrait que la masse M'_T de la Terre soit telle que :

$$v_l = \left(\frac{2GM'_T}{r_0}\right)^{1/2} = c \quad \text{soit} \quad M'_T = \frac{r_0 c^2}{2G} = 4,588 \times 10^{33}\,\text{kg}$$

soit plus de 2 000 fois la masse du Soleil.

4. a) Calculons la période, la pulsation et la longueur d'onde correspondante :

$$T = \frac{1}{\nu} = 10^{-8}\,\text{s} = 10\,\text{ns} \qquad \omega = 2\pi\nu = 6,28 \times 10^8\,\text{rad.s}^{-1} \quad \text{et} \quad \lambda = cT = 3\,\text{m}$$

b) Cet écart spectral est dû à l'effet Doppler-Fizeau entre les positions extrêmes S_1 et S_2 de la source ISS en mouvement, lorsque ISS apparaît à l'horizon en S_1 en se rappochant de O, et lorsque ISS disparaît à l'horizon en s'éloignant de O. Les vitesses à prendre en compte sont évidemment les vitesses de rapprochement de la source en S_1 et d'éloignement de cette source en S_2. On reconnaît dans les expressions le rapport de la vitesse selon la direction de propagation sur la vitesse c des ondes électromagnétiques dans le vide. Calculons ces fréquences :

$$\nu_{r,min} = \frac{10^8}{1 + (7,672/300\,000)(6,4/6,8)} = 99\,997\,593\,\text{Hz} \qquad \text{et} \qquad \nu_{r,max} = 100\,002\,400\,\text{Hz}$$

c) On a :

$$\overline{\nu}_r = \frac{\nu_{r,min} + \nu_{r,max}}{2} = 99\,999\,996,5\,\text{Hz} \quad \text{d'où} \quad \frac{\overline{\nu}_r - \nu_s}{\nu_s} = -3,5 \times 10^{-5}$$

Cet écart spectral relatif est mesurable car les horloges atomiques fournissent aisément une telle précision.